

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài 1 (4,0 điểm):

1. Chứng minh rằng: $M = (a^2 + a)(2a + 1)$ chia hết cho 6 với mọi $a \in \mathbb{Z}$.
2. Tìm một số tự nhiên có ba chữ số thỏa mãn cả ba điều kiện sau đây:
 - a) Chữ số hàng chục bằng trung bình nhân của chữ số hàng trăm và chữ số hàng đơn vị.
 - b) Chữ số hàng đơn vị bằng tích của chữ số hàng chục và chữ số hàng trăm.
 - c) Nghịch đảo của chữ số hàng trăm bằng tổng của nghịch đảo chữ số hàng chục và hai lần nghịch đảo chữ số hàng đơn vị.

Bài 2 (9,0 điểm):

1. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{x} + 3}{3 - \sqrt{x}}$$

- a) Rút gọn biểu thức P.
 - b) Tính giá trị của P với $x = 14 - 6\sqrt{5}$
 - c) Tìm GTNN của P.
2. Giải các phương trình.
- a)
$$\frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{1}{x^2 + 8x + 15} + \frac{1}{x^2 + 12x + 35} + \frac{1}{x^2 + 16x + 63} = \frac{1}{5}$$
 - b)
$$\sqrt{x + 6 - 4\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}} = 1$$

Bài 3 (4,5 điểm): Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax và By cùng nằm về một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB. Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn (M khác A và B), tiếp tuyến tại M của đường tròn cắt các tiếp tuyến Ax, By theo thứ tự tại E và C. Gọi H là giao điểm của AM và OE, K là giao điểm BM và OC.

1. Chứng minh $HK = OM$.
2. Kẻ MI vuông góc với AB (I thuộc AB). Gọi giao điểm của AC và MI là N. Chứng minh:
 - a) N là trung điểm của MI
 - b) Ba điểm B, N, E thẳng hàng.

Bài 4 (2,5đ): Cho tam giác ABC vuông tại A. Một đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \geq \frac{9}{BC^2}$

**HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9
NĂM HỌC 2012 - 2013**

ĐỀ CHÍNH THỨC

ngày 09 tháng 01 năm 2013

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (4,0đ):	<p>1. $M = (a^2 + a)(2a + 1) = a(a + 1)[(a - 1) + (a + 2)]$ $\Rightarrow M = (a - 1)a(a + 1) + a(a + 1)(a + 2)$ (*) Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $(a - 1)a(a + 1)$ và $a(a + 1)(a + 2)$ là các tích của 3 số nguyên liên tiếp, do đó chúng chia hết cho 2 và 3. Mà $(2,3) = 1$ nên các tích đó đều chia hết cho $2 \cdot 3 = 6$. Vậy từ (*) $\Rightarrow M : 6$ (đpcm)</p> <p>2. Gọi số tự nhiên (có 3 chữ số) cần tìm là \overline{abc}. Đk: $a, b, c \in \mathbb{N}; 1 \leq a, b, c \leq 9$</p> <p>Theo các điều kiện a), b), c) của bài ra, ta có hpt: $\begin{cases} b = \sqrt{ac} & (1) \\ c = ab & (2) \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{2}{c} & (3) \end{cases} (*)$</p> <p>Giải hpt (*): Từ (1) $\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow c = \frac{b^2}{a} = ab$ (kết hợp (2)) $\Rightarrow b = a^2$ và $c = a^3$. Thay vào (3) ta có $a^2 - a - 2 = 0$ $\Rightarrow a_1 = 2$ (tmđk); $a_2 = -1$ (không tmđk) $\Rightarrow b = 4$ và $c = 8$ (tmđk) \Rightarrow số tự nhiên cần tìm là 248</p>	<p>0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,5đ 0,75đ 0,75đ</p>
Bài 2 (9,0đ):	<p>1. Điều kiện để giá trị của biểu thức P xác định : $x \geq 0; x \neq 9$</p> <p>a) Rút gọn:</p> $P = \frac{x\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}$ $= \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2(\sqrt{x} - 3)^2 - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)}$ $= \frac{x\sqrt{x} - 3 - 2x + 12\sqrt{x} - 18 - x - 3\sqrt{x} - \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)}$ $= \frac{x\sqrt{x} - 3x + 8\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x}(x + 8) - 3(x + 8)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1}$ <p>b) $x = 14 - 6\sqrt{5} = (3 - \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 - \sqrt{5}$</p> <p>Khi đó $P = \frac{14 - 6\sqrt{5} + 8}{3 - \sqrt{5} + 1} = \frac{22 - 6\sqrt{5}}{4 - \sqrt{5}} = \frac{58 - 2\sqrt{5}}{11}$</p> <p>c) $P = \frac{x + 8}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - 1 + 9}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1}$</p>	<p>0,5 0,5 0,5 1,0 0,5 0,5</p>

